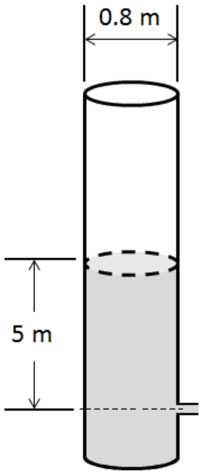
Tema. Mecánica de Fluidos. Ecuación de Bernoulli.

Ejercicio resuelto.

Considere un tanque abierto, el cual almacena shampoo con densidad de 1450 [Kg/m^3] a una temperatura constante de 24 [°C]. El tanque tiene una toma con diámetro de ½ de pulgada, la cual se utiliza en un sistema de llenado para dosificar el shampoo aprovechando la energía asociada a la fuerza de gravedad. Considere que la distancia de la toma al espejo del fluido es de 5 [m] como se muestra en la figura.



Determine:

a) La velocidad del shamppo en el orificio.
b) El gasto volumétrico del shampoo en esas condiciones.

Solución:

a).Velocidad de salida.

Dado que se trata de un problema de mecánica de fluidos en donde se supone una temperatura constante. Se considera que el shampoo es un líquido incompresible (densidad constante) y el tanque está abierto, es decir, el análisis se efectúa a presión atmosférica. Bajo estas consideraciones se aplica la ecuación general de Bernoulli,

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\ g\ h = constante \tag{1}$$

Donde P es la presión [N/m^2] en el punto de interés, ρ es la densidad del fluido [Kg/m^3], v es la velocidad del fluido en el punto de interés, g es la constante de la gravedad = 9.81 [m/s^2] y h es la altura manométrica en el punto de interés.
Considerando dos puntos de interés. El punto 1 en el espejo del shampoo, a 5 metros por encima de la toma, y el punto 2 precisamente en la toma. Aplicando la ecuación (1) en ambos puntos resulta:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho_1\ g\ h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho_2\ g\ h_2 \tag{2}$$

Debido a que $P_{\text{atmosférica}} = P_1$ y P_2 , y que $h_2 = 0$ por ser el punto más bajo del sistema a analizar, despejando ${v_2}^2$de (2) resulta:

$${v_2}^2 = {v_1}^2 + 2\ g\ h_1 \tag{3}$$

Por otra parte, considerando la conservación de volumen es evidente que el volumen que sale del orificio es el mismo volumen que se desaloja en el tanque. Por consiguiente:

$$\frac{Volumen}{tiempo} = v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{4}$$

Siendo A_1 el área en la sección transversal del tanque en el punto 1 y A_2 el área en la sección transversal del orificio (punto 2). Despejando v_1 de la ecuación (4) y sustituyendo la ecuación fundamental del área de una circunferencia, resulta:

$$v_1 = \frac{v_2 A_2}{A_1} = \frac{v_2 \pi \left(\frac{d_2}{4}\right)^2}{\pi \left(\frac{d_1}{4}\right)^2} = v_2 \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (3), resulta:

$${v_2}^2 = \left(v_2 \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}\right)^2 + 2\, g\, h_1 = {v_2}^2 \frac{{d_2}^4}{{d_1}^4} + 2\, g\, h_1 \tag{6}$$

Reordenando la ecuación, tomando como factor común ${v_2}^2$ se obtiene:

$$2\, g\, h_1 = {v_2}^2 \left(1 - \frac{{d_2}^4}{{d_1}^4}\right) \tag{7}$$

Despejando la velocidad en el punto 2, finalmente la velocidad queda definida como:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\, g\, h_1}{\left(1 - \frac{{d_2}^4}{{d_1}^4}\right)}} \tag{8}$$

Sustituyendo valores con en (8) con: h1 = 5 [m], g = 9.81 [m/s^2] d_1= 0.8 m, d_2 = ½ plg. = (0.5) (0.0254) = 0.0127 [m], resulta:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\,(9.81)\,(5)}{\left(1 - \frac{0.0127^4}{0.8^4}\right)}} = 9.9 \left[\frac{m}{s}\right] \tag{9}$$

b). El Gasto volumétrico se puede obtener a partir de la siguiente relación:

$$Gasto\ Volumétrico = Area\ \times velocidad \tag{10}$$

Considerando el gasto de shampoo en el punto 2, al sustituir valores en la ecuación (10) resulta:

$$Gasto\ Volumétrico = \pi\ \left(\frac{0.0127}{2}\right)^2\ \times 9.9 = 1.25\ \times 10^{-3}\ \left[\frac{m^3}{s}\right]$$