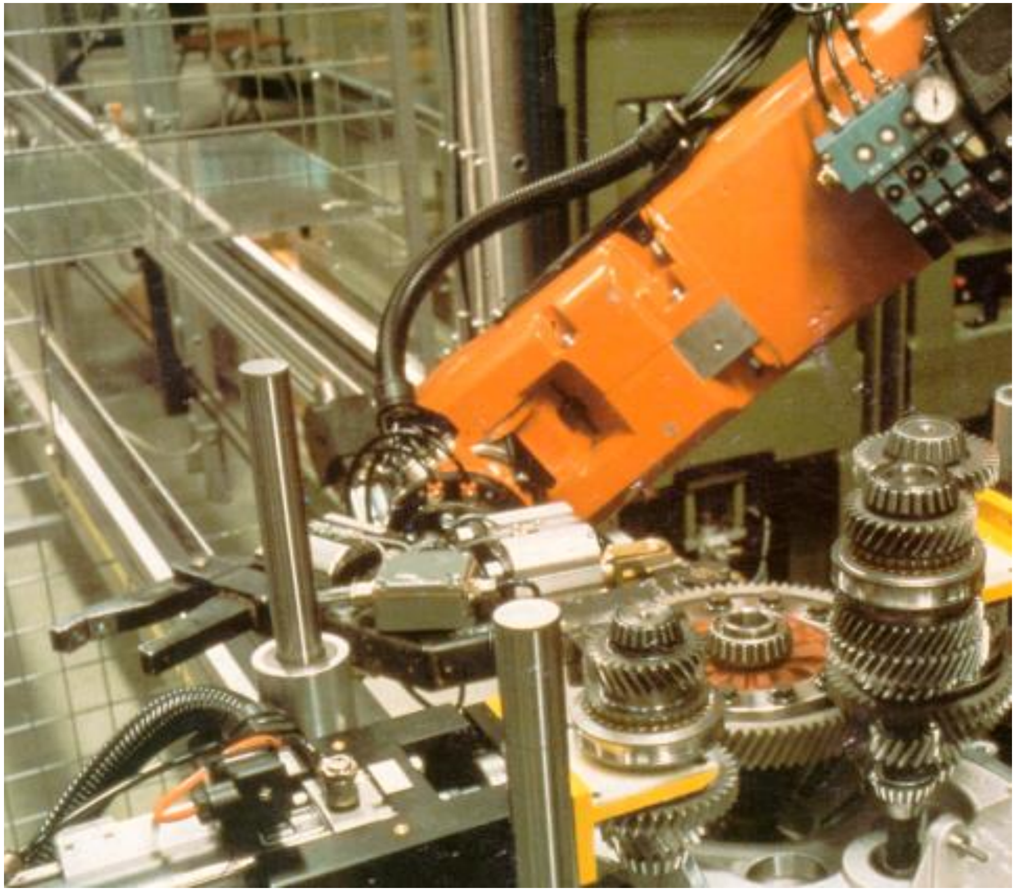
Inercia

¿Qué es la inercia?

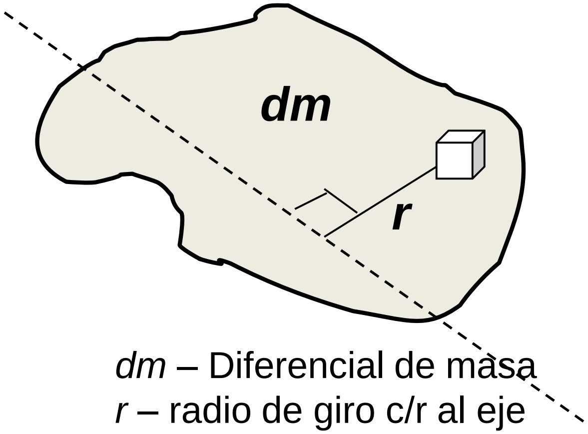
Es la propiedad que presentan todos los cuerpos de resistirse al cambio de su movimiento.



¿Cómo se determina la inercia?

La inercia de un cuerpo rígido se valora mediante su momento de inercia, lo que permite saber como esta distribuida su masa con respecto a un eje.

$$I_0 = \int_m r^2 \, dm$$



dm – Diferencial de masa
r – radio de giro c/r al eje

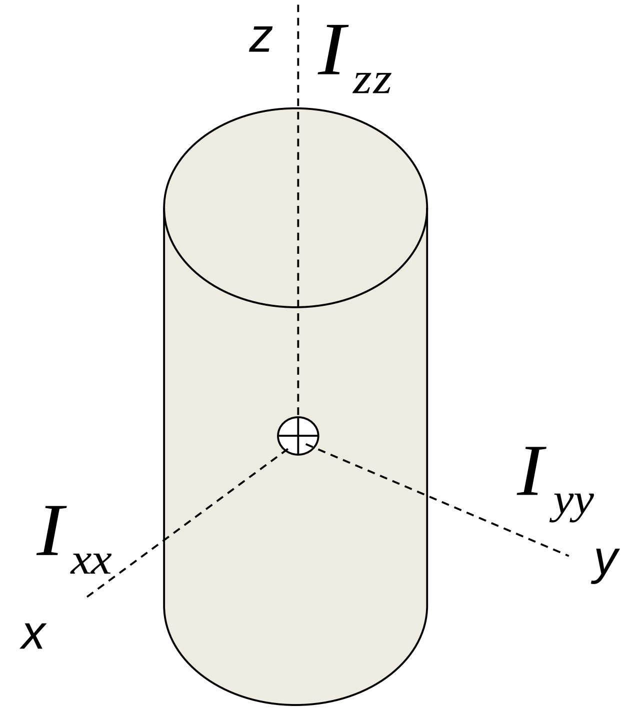
La distribución de masa de un cuerpo rígido se expresa mediante la matriz de inercia.

$$[I]=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

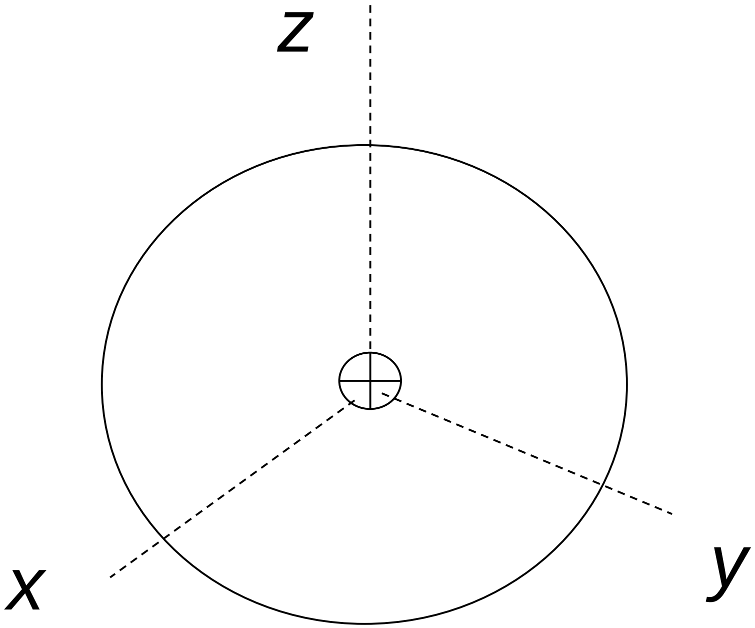
¿En dónde se ubica el momento de inercia?

Los momentos de inercia principales se ubican sobre los ejes principales de cada cuerpo.

Estos ejes son ortogonales y presentan su origen en el centro de gravedad del cuerpo.



Momentos principales de inercia.



$$I_{xx} = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{yy} = \int_m (x^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

Cuando se obtiene la matriz de inercia con respecto a los ejes principales, esta toma la forma..

$$[I]=\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Los productos de inercia son cero

Los productos de inercia están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\, dm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz\, dm$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\, dm$$

Los momentos de inercia principales en cuerpos delgados con espesor constante.

$$I_{xx} = \int_m y^2 \, dm = \rho E \int_A y^2 \, dA = \frac{m}{A} \int_A y^2 \, dA = \frac{m}{A} I_x$$

$$I_{yy} = \int_m x^2 \, dm = \rho E \int_A x^2 \, dA = \frac{m}{A} \int_A x^2 \, dA = \frac{m}{A} I_y$$

Siendo ρ la densidad, E el espesor, A el área de la sección transversal e Ix, Iy momentos de inercia de área.

El momento de inercia principales I_{zz} en cuerpos delgados con espesor constante.

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2)\, dm = \rho E \int_A r^2\, dA = \frac{m}{A} J_0$$

Siendo ρ la densidad, E el espesor , A el área de la sección transversal y Jo el momento polar de inercia.

¿Cómo se calcula el momento de inercia de masa con respecto a un sistema de ejes arbitrario?

Paso 1. Determinar la posición del centro de gravedad del cuerpo.

$$x = \frac{\int_m x\, dm}{\int_m dm} \qquad y = \frac{\int_m y\, dm}{\int_m dm} \qquad z = \frac{\int_m z\, dm}{\int_m dm}$$

Paso 2. Obtener la matriz de inercia.

Paso 3. Aplicar el teorema de los ejes paralelos.

$$Ixx_O = Ixx + (d_y^2 + d_z^2)m$$

$$Iyy_O = Iyy + (d_x^2 + d_z^2)m$$

$$Izz_O = Izz + (d_x^2 + d_y^2)m$$

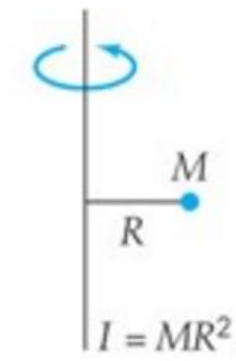
$$Ixy_O = Ixy + (d_x\, d_y)m$$

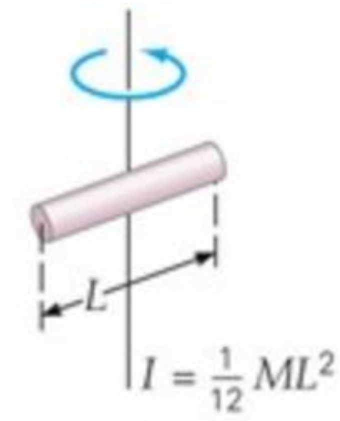
$$Ixz_O = Ixz + (d_x\, d_z)m$$

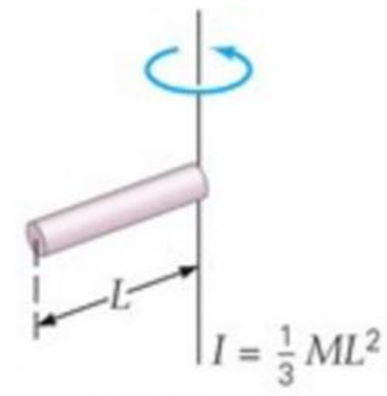
$$Iyz_O = Iyz + (d_y\, d_z)m$$

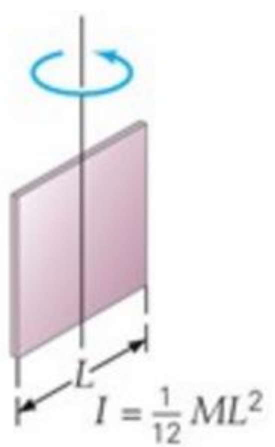
dx, dy y dz son las coordenadas del cuerpo con respecto a un sistema inercial (Xo,Yo,Zo) paralelo al sistema de los ejes inerciales del cuerpo.

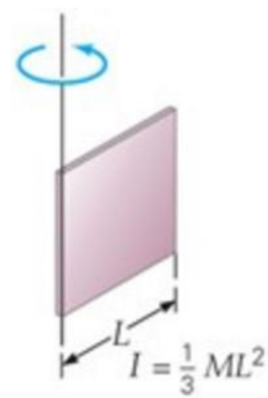
Inercia de cuerpos regulares.

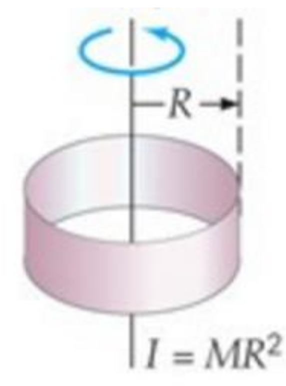




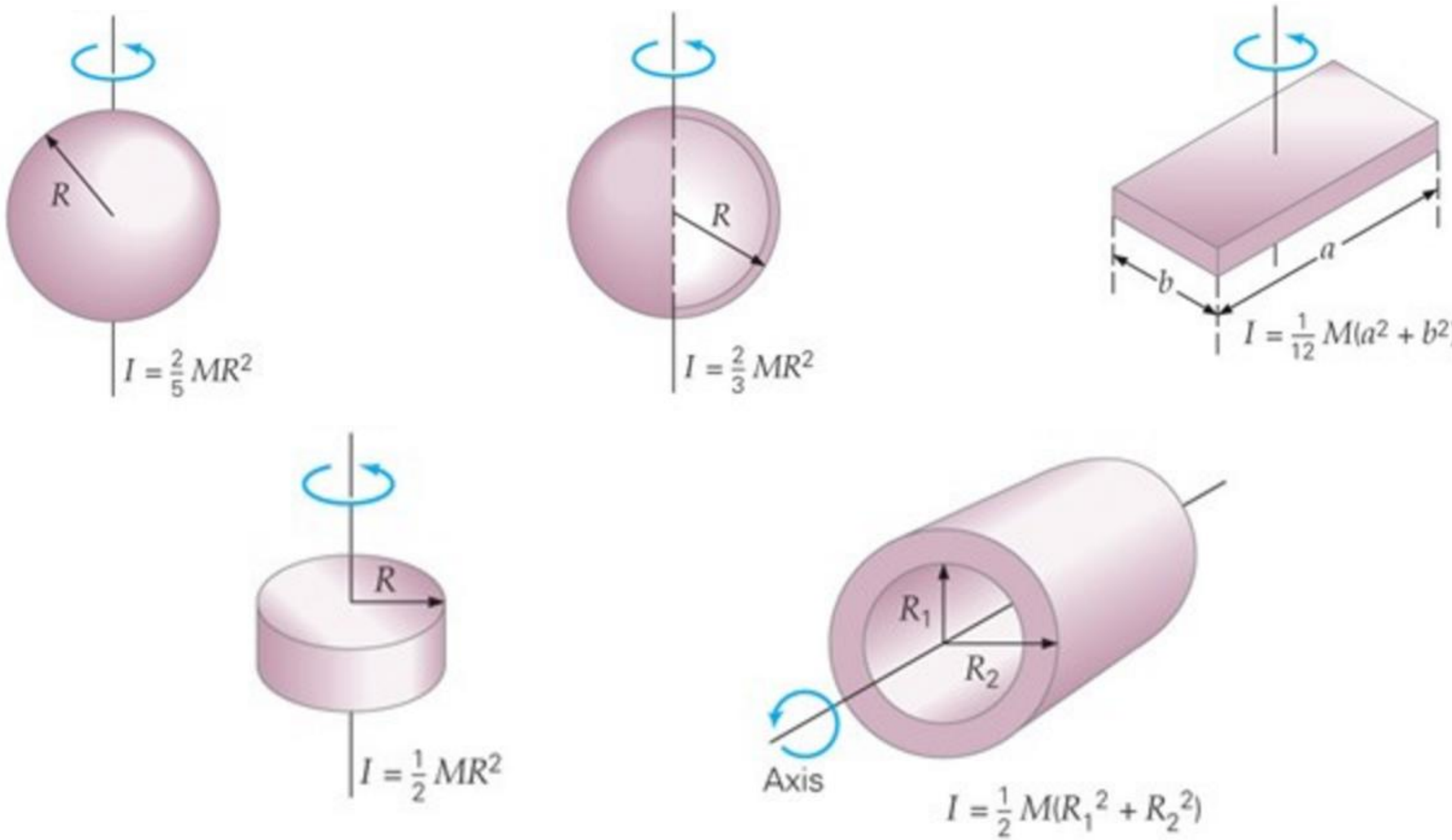








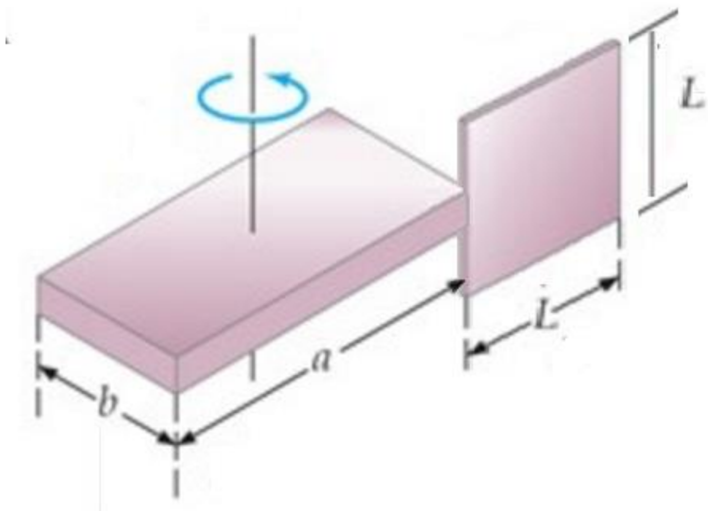
Inercia de cuerpos regulares.



Tarea:

1. Describa tres ejemplos en donde el conocimiento de la inercia sea importante para entender el comportamiento del fenómeno físico asociado.

2. Aplicando el teorema de los ejes paralelos determine la inercia del cuerpo rígido en el eje de giro.



Considere que el espesor es despreciable y la placa de longitud L se une justo en la mitad de su altura con la otra placa (a x b) como se muestra en la figura.